

OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO BASADA EN METAHEURÍSTICAS

SIXTO RÍOS-INSUA, ALFONSO MATEOS y ANTONIO JIMÉNEZ

RESUMEN

El progreso en el campo de las metaheurísticas está siendo rápido, surgiendo continuamente nuevas ideas, desarrollos e implementaciones en un intento de alcanzar una mayor eficiencia en el proceso de solución de los problemas de optimización complejos. El objetivo de este artículo es presentar las líneas básicas y algunos desarrollos recientes en este área, tanto en el caso uniobjetivo como en el multiobjetivo, haciendo énfasis en los tres enfoques básicos: algoritmos evolutivos, recocido simulado y búsqueda tabú. En época relativamente reciente se ha observado un interés creciente por el desarrollo de nuevos métodos de solución, incluyendo su aplicación a problemas combinatorios y no lineales, siendo por ello las metaheurísticas uno de los campos de investigación en optimización más activos en la actualidad.

INTRODUCCIÓN

Los problemas de optimización con múltiples objetivos surgen de manera natural en muchas áreas y su resolución de manera eficiente constituye un desafío importante desde hace tiempo. Así, es bien conocido que nos enfrentamos en muchas situaciones reales con problemas de decisión, Ríos Insua *et al.* (2002), en los que el éxito para alcanzar una solución no puede evaluarse con un solo objetivo, sino que deben considerarse simultáneamente múltiples objetivos, que suelen ser conflictivos en el sentido de que la mejora en uno o varios conlleva un deterioro en otros. Por ello, en tales situaciones complejas no existe una solución denominada ideal, siendo necesaria la búsqueda de una solución de compromiso de acuerdo con las preferencias del decisor.

El proceso matemático de búsqueda de tal solución se conoce como *programación multiobjetivo*. En los primeros tiempos del tratamiento de estos problemas, la estrategia de solución consistía en considerar la optimización de un único objetivo e imponer unos niveles mínimos de satisfacción para los restantes objetivos considerados. Sin embargo, debido a la creciente complejidad de los problemas que se tratan de resolver, en las últimas tres décadas ha habido un notable interés por el desarrollo de nuevos procedimientos matemáticos de optimización multiobjetivo para la resolución de tales problemas. Entre los más conocidos se encuentran los métodos de ge-

neración del conjunto eficiente u óptimo de Pareto (Steuer, 1986), la programación de compromiso (Yu, 1973; Zeleny, 1982) y la programación por metas (Charnes y Cooper, 1961; Ignizio y Cavalier, 1994). También han surgido procedimientos estándar de solución basados, buena parte de ellos, en el método del Símplex, pero con la importante limitación de que sólo es posible su aplicación a problemas lineales y/o enteros, Ríos Insua (1993). Pensemos que muchos de los problemas reales complejos que se modelizan hoy en día conllevan diversos factores que hacen muy difícil su resolución con tales métodos. Entre los factores más relevantes podríamos citar la consideración de un número grande de variables enteras y binarias, no linealidad, funciones de utilidad subyacentes imprecisas, componentes estocásticas... Tal tipo de factores surgen con frecuencia en muchas disciplinas o áreas de conocimiento, como es el caso de la Ingeniería, Medicina o Economía.

Hasta época relativamente reciente, los factores aludidos y otros han limitado la utilización de técnicas de solución de modelos uniobjetivo y multiobjetivo, sin embargo, en los últimos años dos avances notables han permitido afrontar con cierta garantía modelos bastante más complejos. El primero está relacionado con el importante desarrollo habido en el campo de las Ciencias de la Computación y, el segundo, que se apoya en el anterior, en la formulación de *heurísticas* más apropiadas y eficientes para la resolución de esta clase de problemas. La diferencia entre heurística y algoritmo se encuentra en el hecho de que la primera no garantiza alcanzar una solución óptima, pues está diseñada para lograr una solución aceptable en un tiempo razonable. Sin embargo, en la práctica, ambos términos se utilizan indistintamente. Así, una heurística podría definirse como un procedimiento que trata de alcanzar buenas soluciones con un coste computacional razonable, pero sin garantizar la optimalidad (o incluso factibilidad) y que suele desarrollarse para problemas específicos. Como extensión de los métodos heurísticos se han comenzado a desarrollar en época reciente las *metaheurísticas*, término introducido por Glover (1986), que son métodos de solución cuya aplicación es posible a una amplia gama de problemas, es decir, son heurísticas con un ámbito de aplicación mucho más general y podrían definirse como técnicas de búsqueda de soluciones basadas en ideas o conceptos de otras disciplinas, que mediante su adaptación a un escenario específico, constituyen una ayuda en la resolución del problema modelizado. Las más conocidas y utilizadas son, Ríos Insua *et al.* (1997): los *algoritmos evolutivos*, que emulan la forma de procreación y adaptación de las especies en el campo de la genética; el *recocido simulado*, que emula la forma en que se enfrían los materiales para alcanzar un estado de mínima entropía; y la *búsqueda tabú*, que se inspira en el concepto social «tabú», para proporcionar una técnica de búsqueda eficiente que evite el anclaje en un óptimo local.

La utilización de metaheurísticas para resolver problemas de optimización multiobjetivo ha sido motivada, esencialmente, por el hecho de que la naturaleza de tales algoritmos permite la generación de elementos del *conjunto eficiente*. Además, la complejidad de tales problemas hace que la mayoría de las técnicas de solución tradicionales sean muy poco eficientes.

En este artículo se pretende plantear una visión general del área de optimización multiobjetivo basada en metaheurísticas, que actualmente tratan de resolver problemas de optimización complejos en las Ciencias de la Computación, Ingeniería, Biología, Medicina, Economía..., describiendo la manera en que se han desarrollado las meta-

heurísticas con énfasis hacia los problemas multiobjetivo e indicando algunas aplicaciones y aspectos sobre el estado del arte en este área.

OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO

El problema de *optimización multiobjetivo*, también denominado de optimización vectorial o multicriterio, se puede definir en términos genéricos como «la determinación de los valores para un vector de variables de decisión que satisfaga un conjunto de restricciones y optimice una función vectorial, cuyos elementos representan las funciones objetivo individuales». Tales funciones forman una descripción matemática de la ejecución de los criterios, que usualmente serán conflictivos. Por tanto, el término optimización significará encontrar una solución que proporcione valores en todas las funciones objetivo aceptables para el decisor. Vamos a precisar a continuación en términos matemáticos esta afirmación.

Las *variables de decisión*, denotadas x_j , $j = 1, \dots, n$, son las variables que controla el decisor y a las que habrá que asignar cantidades numéricas en el problema de optimización. En notación vectorial se podrán escribir $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, donde T significa la trasposición del vector columna al vector fila. Los posibles valores que pudieran tomar las variables pertenecerán al espacio euclídeo n -dimensional \mathfrak{R}^n y, además, posiblemente vendrán limitados por un conjunto de restricciones, ya que en la mayoría de los problemas de optimización surgen restricciones impuestas por las características específicas del contexto o la disponibilidad limitada de los recursos, que deben satisfacerse para que los valores de las variables de decisión sean aceptables. Las restricciones se expresarán mediante inecuaciones y/o ecuaciones, que conjuntamente y de forma abreviada se indicarán con la notación $\bar{x} \in X$. Las funciones objetivo se designarán con $f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})$, siendo m el número de tales funciones en el problema multiobjetivo a resolver. Así, el conjunto de funciones objetivo formarán una función vectorial $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))^T$, que tomará valores en el espacio euclídeo m -dimensional \mathfrak{R}^m . Ahora podemos definir formalmente el problema de optimización multiobjetivo general como: *determinar el vector $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ que satisfaciendo las restricciones asociadas, es decir $\bar{x} \in X$, optimice la función vectorial $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))^T$.*

Dicho de otra forma, se pretende determinar de entre el conjunto de valores que verifican las restricciones asociadas, el conjunto particular x_1^*, \dots, x_n^* que proporcionan valores óptimos para todas las funciones objetivo. Las restricciones definen la región formada por las soluciones admisibles, denominada *región factible* e indicada con X . Así, la función vectorial $\bar{f}(\bar{x})$ estará definida en $X \subset \mathfrak{R}^n$ y tomará valores en el conjunto $\Lambda \subset \mathfrak{R}^m$, que representa todos los posibles valores que pueden tomar las funciones objetivo.

En cuanto a la optimización de la función vectorial $\bar{f}(\bar{x})$, podemos considerar que se pueden dar tres situaciones: 1) minimización de todas las funciones objetivo; 2) maximización de todas las funciones objetivo; y 3) minimización de unas y maximización de otras.

zación de otras. Para la simplificación del problema, usualmente todas las funciones objetivo se convierten a maximización o minimización. Así, un problema de optimización multiobjetivo se puede escribir en forma abreviada

$$\bar{f}(\bar{x}^*) = \underset{\bar{x} \in X}{opt} \bar{f}(\bar{x}),$$

en que «*opt*» se utiliza para indicar el óptimo de la función vectorial \bar{f} . El problema que surge en el paso de un problema escalar o uniobjetivo a uno vectorial o multiobjetivo, es que el concepto de óptimo no está bien definido en este contexto multidimensional, pues es inusual que se disponga de una solución \bar{x}^* que verifique, bajo la condición de que todas las funciones objetivo sean o se hubieran transformado a la forma de minimización, que es lo que supondremos en lo que sigue, que

$$f_i(\bar{x}^*) \leq f_i(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in X, \quad i = 1, \dots, m.$$

Así, teniendo varias funciones objetivo, la noción de óptimo cambia respecto del planteamiento uniobjetivo, siendo ahora necesario que para el contexto multiobjetivo se trate de alcanzar un buen compromiso más que una solución óptima, como en la optimización global. La noción de óptimo típicamente utilizada es la propuesta inicialmente por F.Y. Edgeworth en 1881 y posteriormente generalizada por V. Pareto en 1896, de aquí que se utilice el término *óptimo de Pareto* o también *eficiencia*, entre otros, que a continuación precisamos: *Un punto $\bar{x}^* \in X$ es un óptimo de Pareto, solución eficiente o no dominada, si no existe otra solución $\bar{x} \in X$ tal que $f_i(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}^*)$, $\forall i = 1, \dots, m$, y existe al menos un índice i tal que $f_i(\bar{x}) < f_i(\bar{x}^*)$.* Las desigualdades anteriores las expresaremos de manera conjunta escribiendo $\bar{x}^* \succ \bar{x}$, que significa que \bar{x}^* domina a \bar{x} (existen otros conceptos que son modificación del anterior, como eficiencia débil, fuerte..., ver Ríos *et al.*, 1989).

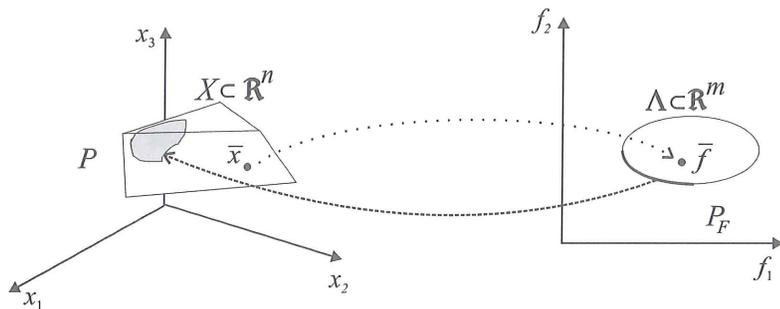
Con esta definición se quiere expresar el hecho de que \bar{x}^* es eficiente u optimal de Pareto o Pareto óptima, si no existe otra solución factible \bar{x} que tome un valor menor en algún objetivo sin causar un incremento simultáneo en al menos otro. Como consecuencia de este concepto de óptimo, surge el de *conjunto eficiente* u *optimal de Pareto* o *no dominado*, denotado por P , que estaría formado por todas las soluciones eficientes, es decir,

$$P = \{ \bar{x} \in X : \text{no existe } \bar{x}' \in X \text{ con } \bar{x}' \succ \bar{x} \}.$$

Así, P será el conjunto de soluciones \bar{x} obtenido a partir de los vectores $\bar{f}(\bar{x})$ no dominados con respecto a todos los vectores de Λ , Figura 1. Otro concepto utilizado es la frontera de Pareto, que se define, ver Figura 1, como

$$P_f = \{ \bar{f} = (f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})) : \bar{x} \in P \}.$$

Por tanto, el problema que se le presenta al decisor será seleccionar la solución de compromiso o más preferida dentro del conjunto P . La generación de todo el conjunto P como parte del proceso de solución para una posible elección posterior,



Espacio de variables de decisión (con $n=3$)

Espacio de funciones objetivo (con $m=2$)

FIGURA 1. Esquema del problema general de optimización multiobjetivo.

resulta en general muy difícil, además de que puede conllevar un esfuerzo computacional muy grande, por lo que las estrategias de solución para la optimización que se han desarrollado y que se plantean a continuación, van dirigidas en su totalidad hacia la obtención directa de una solución eficiente y que además sea satisficente («satisficing»), Simon (1957).

ALGORITMOS EVOLUTIVOS

El origen de los algoritmos evolutivos se encuentra en el término *algoritmo genético*, propuesto en 1975 por Holland en su libro titulado «Adaptation in Natural and Artificial Systems», Holland (1975), y que fue la base para la creación y desarrollo de lo que actualmente es un activo campo de investigación y con un enfoque sobre aplicaciones mucho más amplio que el que tuvo en su planteamiento inicial. Muchos investigadores utilizan ahora los términos *computación evolutiva* o *algoritmos evolutivos* con el objeto de cubrir los amplios desarrollos habidos en los últimos años. Sin embargo, en el contexto de las metaheurísticas, es probablemente cierta la afirmación de que los algoritmos genéticos en su forma original abarcarían la mayoría de los conceptos básicos que se utilizan en la actualidad en los algoritmos evolutivos.

Ahondando un poco más en el tema, observemos que aunque la influencia de los trabajos de Holland fué determinante para el posterior desarrollo de estas teorías, otros científicos con diferentes antecedentes estuvieron implicados en el desarrollo de ideas análogas. Así, en los Estados Unidos, Fogel (1998) y otros implementaron al final de la década de los sesenta su idea de lo que denominaron *programación evolutiva* y ya en los setenta, en Alemania, Rechenberg (1973) y Schwefel (1977) desarrollaron la idea *de estrategia de evolución*.

El esquema común a estos desarrollos fué la utilización de los conceptos de *mutación* y *selección*, fundamentales en la teoría de la evolución neodarwiniana. Aunque se obtuvieron resultados que parecían prometedores, la computación evolutiva no tomó fuerza hasta mediados de los años ochenta, siendo la escasa potencia de los ordenadores de esa época una de las razones. Un aspecto clave para la promulgación de esta metodología fué el libro de Goldberg (1989), en el que ya se planteó su desarrollo formal tanto a nivel teórico como práctico.

De forma genérica, apuntemos que los algoritmos evolutivos se apoyan en la denominada *población de individuos* o *soluciones*, formada por un subconjunto de la región factible o de la población global. La idea subyacente es que, manteniendo una población de individuos que irá evolucionando en el tiempo, estos métodos pueden ayudar a encontrar muchas soluciones eficientes a través de unos mecanismos de *autoadaptación* y *cooperación*. La autoadaptación significa que los individuos evolucionan independientemente, mientras que la cooperación implica un intercambio de información entre los individuos. Con ello, la población global contribuye al proceso de evolución hacia el conjunto eficiente.

En el contexto multiobjetivo, el primer investigador en introducir una metaheurística evolutiva fué Schaffer (1984), que propuso el método VEGA (Vector Evaluated Genetic Algorithm), una extensión de la metaheurística uniobjetivo conocida como GENESIS y que también fue la base de otros métodos propuestos posteriormente.

Presentamos, a continuación, la estructura básica y conceptos asociados a las metaheurísticas evolutivas que, como hemos apuntado, son en buena parte análogos a su equivalente genético. Así, un individuo es una solución codificada del problema en consideración, que estará representado por una serie de elementos que se corresponden con un genotipo (información genética de un organismo) en biología. Tal genotipo define un individuo cuando se expresa o decodifica en un fenotipo (caracteres observables). El genotipo está compuesto por uno o más cromosomas, donde cada cromosoma está compuesto de genes separados que toman ciertos valores o alelos de un alfabeto genético. Un lugar identifica la posición de un gen dentro del cromosoma. Por tanto, cada individuo de la población se decodifica en un conjunto de parámetros que se utilizan como entrada a la función objetivo y que constituyen conjuntos de cromosomas, que es lo que se entenderá como población. Una representación de estos conceptos se muestra en la Figura 2.

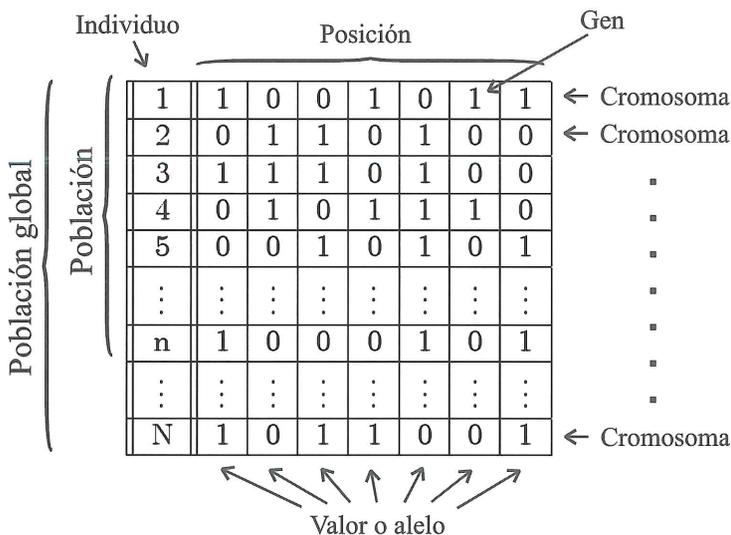


FIGURA 2. Un ejemplo de la terminología utilizada en la codificación de individuos con un código binario.

Como en la naturaleza, los operadores evolutivos actúan a través del algoritmo evolutivo sobre la población tratando de generar soluciones lo más idóneas posibles. En la aplicación de un algoritmo genético se parte de un conjunto (población) de n soluciones (individuos) tomadas de la población global, que va cambiando de acuerdo con los operadores evolutivos y manteniéndose su tamaño en las siguientes iteraciones. Tales operadores evolutivos son: *selección de buenos individuos*, *cruce* o *recombinación*, *mutación* y *selección de malos individuos*. El significado de estas operaciones, que conducen a una nueva generación, es el siguiente:

- *Selección de buenos individuos*. Se escogen con reemplazamiento n individuos de la población, con mayor probabilidad de elección para los individuos de mejor valor.
- *Cruce* o *recombinación de individuos*. Dos individuos se parten aleatoriamente e intercambian sus partes, es decir, se tiene una forma de recombinación que opera sobre dos individuos (ascendentes) para obtener los nuevos individuos (descendientes), tal como se muestra en forma esquemática en la Figura 3.

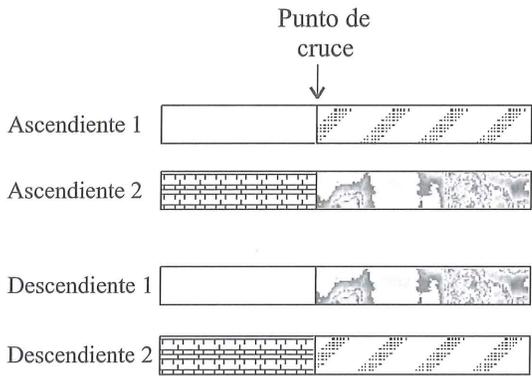


FIGURA 3. Cruce de individuos a través de un sólo punto.

- *Mutación en un individuo*. Con cierta probabilidad se cambian aleatoriamente algunos elementos de la codificación de un individuo. La Figura 4 muestra, para una elección aleatoria de una posición, el cambio del elemento 1 por el 0 (si el código fuera no binario tal cambio sería por algún otro elemento del alfabeto, escogido aleatoriamente).

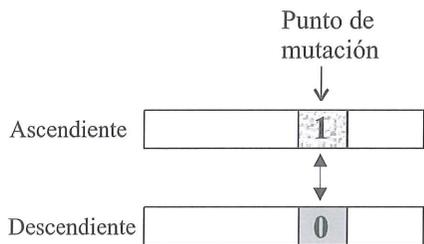


FIGURA 4. Mutación con respecto a una posición.

- *Selección de malos individuos.* Se escogen sin reemplazamiento individuos de la población dando mayor probabilidad a los individuos con peor valor. Tales individuos se sustituyen por los descendientes obtenidos en el paso anterior, teniendo así una nueva población de tamaño n .

La Figura 5 muestra de manera esquemática los procesos básicos de los algoritmos evolutivos

Este proceso evolutivo proporcionará nuevos individuos con una mayor probabilidad de contribuir a mejores descendientes en la siguiente generación. Las diferentes variantes de algoritmos evolutivos se diferencian en los tamaños de las poblaciones, en los de las subpoblaciones de buenos individuos y en las formas específicas de los operadores, que dependerán, entre otros factores, de las restricciones que definen el dominio del problema y que afectan a la estructura de cromosoma y a los alelos, Bäck (1996) y Coello *et al.* (2002).

Observemos que los algoritmos evolutivos parecen resultar particularmente apropiados para la resolución de problemas de optimización multiobjetivo, ya que tratan simultáneamente con un conjunto de posibles soluciones (población). Esto permite encontrar varias soluciones eficientes en una sola iteración del algoritmo y no como la programación matemática tradicional que demanda una serie de iteraciones. Otro aspecto favorable a su utilización, es que son menos susceptibles a las formas o a la continuidad que pudieran tener el conjunto eficiente, aspectos que si son muy importantes o incluso determinantes para los procesos de solución basados en programación matemática.

Las aplicaciones de los algoritmos multiobjetivo evolutivos surgen por primera vez a mediados de los años ochenta, sin embargo, es en la década de los noventa cuando se produce un incremento importante originado por el éxito de las aplicaciones a situaciones reales, mostrándose resultados superiores a los obtenidos con los métodos multiobjetivo clásicos. Estas aplicaciones recorren diferentes áreas, destacando quizás la de la Ingeniería con múltiples y variadas aplicaciones en problemas medioambientales, robótica y control, telecomunicaciones y optimización de redes, electricidad y electrónica... aunque también en Medicina, Química y Ecología entre

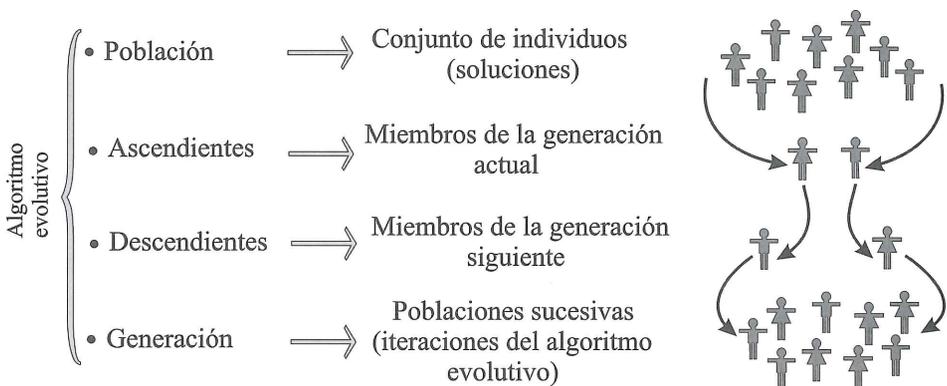


FIGURA 5. Operadores básicos de un algoritmo evolutivo.

otras. Una revisión y clasificación bastante detallada de tales trabajos se puede ver en Coello *et al.* (2002).

RECOCIDO SIMULADO

Los fundamentos de la metaheurística *recocido simulado* fueron introducidos en la década de los años ochenta por Kirpatrick *et al.* (1983) y Cerny (1985), en un intento de proponer un método aleatorizado de búsqueda local con la capacidad de no quedar atrapado en un óptimo local, siendo esta característica la que motivó su desarrollo y posterior utilización en problemas reales complejos. Algunos artículos y libros interesantes de la extensa literatura sobre este tema y que resumen los desarrollos teóricos y dominios de aplicación son Aarts y Korst (1989), Koulamas *et al.* (1994), Fleisher (1995), Aarts y Lenstra (1997) y Henderson *et al.* (2003).

El nombre de este algoritmo proviene de la analogía con el proceso de recocido físico de sólidos, en el que se calienta un sólido cristalino y, a continuación, se deja enfriar muy lentamente hasta que alcanza una configuración cristalina lo más uniforme posible, es decir, un estado de entropía mínimo, estando así, libre de defectos. El recocido simulado establece la conexión entre este tipo de comportamiento termodinámico y la búsqueda de un mínimo global para un problema de optimización discreto, proporcionando un procedimiento algorítmico para aprovechar y explotar tal conexión. En cada iteración de la metaheurística de recocido simulado se comparan los valores de dos soluciones, la actual y una nueva seleccionada en un entorno de la actual. Si la nueva solución es mejor se acepta, pero si es peor también se aceptará con una determinada probabilidad, que depende de un parámetro temperatura, típicamente decreciente con cada iteración del algoritmo.

Así, la característica fundamental del recocido simulado es que proporciona un medio para no quedar atrapado en un óptimo local, permitiendo movimientos a nuevas soluciones que empeoren ocasionalmente la función objetivo. Al irse reduciendo el valor del parámetro temperatura, disminuye la probabilidad de aceptación de malas soluciones y la distribución de las soluciones asociadas con la cadena de Markov no homogénea que modeliza el comportamiento del algoritmo, es de esperar que converja a una zona que concentre el conjunto de soluciones eficientes (globalmente óptimas en el caso uniobjetivo).

Describimos a continuación las características específicas y básicas del algoritmo de recocido simulado para optimización discreta, que esencialmente es una extensión del caso uniobjetivo para afrontar el concepto de eficiencia u optimalidad de Pareto. Dada la región factible X y una función vectorial $\bar{f}: X \rightarrow \mathfrak{R}^n$, se pretende encontrar una solución de compromiso, es decir, una solución de la región factible que sea eficiente y satisfaciente para el decisor. El recocido simulado comienza con la selección (aleatoria) de una solución inicial $x \in X$ y se genera (de manera aleatoria o de acuerdo con alguna distribución de probabilidad previamente acordada) una nueva solución $x' \in E(x)$, con $E(x)$ entorno de x . Si $x' \succ x$, entonces x' se convierte en la solución actual. En otro caso, x' se acepta como solución actual con probabilidad

$$p = \prod_{i=1}^n \min\{1, \exp((f_i(\bar{x}) - f_i(x'))/t_k)\}$$

donde t_k es el parámetro temperatura en la iteración k , que verificará las condiciones

$$t_k > 0 \quad \forall k \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0.$$

Si fuera $t_k=0$ sólo se aceptarían nuevas soluciones que dominaran a la actual. La probabilidad p de aceptación es el elemento básico del proceso de búsqueda. Si la temperatura se reduce de manera suficientemente lenta, entonces el sistema puede alcanzar un estado de equilibrio, que se asume que sigue la distribución de Boltzman.

La probabilidad p propuesta se denomina SP («Simple Product»), pero existen otras expresiones que pueden ser más adecuadas dependiendo de las características del problema bajo estudio, Serafini (1992).

Respecto a la convergencia, se han considerado típicamente dos direcciones. El enfoque de la cadena de Markov homogénea, Johnson y Jacobson (2002), asume que cada temperatura t_k se mantiene constante para un número suficiente de iteraciones y, con esta hipótesis, se demuestra que la matriz estocástica de probabilidades de transición puede alcanzar la estacionariedad. Así, la sucesión de soluciones $\{x_n\}$ generada por el algoritmo corresponde a la realización de una cadena de Markov que converge al óptimo global en el caso escalar. En la práctica, se suele tomar un número de transiciones suficientemente grande como para que permita la exploración de los entornos y así posibilitar la convergencia al óptimo.

El segundo enfoque de convergencia esta basado en la teoría de cadenas de Markov no homogéneas, Anily y Federgruen (1987), no siendo necesario que la cadena de Markov alcance una distribución estacionaria, aunque se requieren otras condiciones, Mitra *et al.* (1986).

Otros aspectos prácticos importantes en la ejecución del algoritmo son:

- *Proceso de enfriamiento.* Éste se encuentra definido a partir de una temperatura inicial t_1 (al que se le suele asignar un valor para el que la probabilidad inicial de aceptación de soluciones peores sea alta, por ejemplo, 0.9) y su secuencia de reducción incluyendo un criterio de parada. Romeo y Sangiovanni-Vicentelli (1991) observan que un proceso de enfriamiento eficiente resulta esencial para reducir la cantidad de tiempo requerido por el algoritmo para encontrar la solución satisfaciente. De aquí que el número de trabajos dedicados al estudio de este proceso es notable como pueden verse, por ejemplo, en Nourani y Andresen (1998), Cohn y Fielding (1999) y Fielding (2000), entre otros. Los procesos de enfriamiento se agrupan en dos clases: las *secuencias estáticas*, que son aquéllas que se especifican en su totalidad antes de comenzar el algoritmo (la más sencilla y utilizada consiste en mantener la temperatura durante L iteraciones y después reducirla multiplicándola por un factor α ($0 < \alpha < 1$), de manera que después de hL pasos, la temperatura es $\alpha^h t_1$) y las *secuencias adaptativas*, que ajustan la tasa de decrecimiento de la temperatura basándose en información obtenida durante la ejecución del algoritmo.

- *Elección del entorno.* Su definición es un aspecto clave, habiéndose probado que la eficiencia del recocido simulado está fuertemente influenciada por el tipo de entorno utilizado, Moscato (1993), así como por su tamaño. No existen resultados

teóricos sobre este último aspecto, habiéndose llegado por el momento a la conclusión de que la elección del tamaño del entorno tiene una fuerte dependencia de las características específicas del problema.

- *Criterios de parada.* Es otro problema abierto y sobre el que se han hecho diferentes propuestas no definitivas. Entre ellas, las más utilizadas son: parar si la función objetivo f no ha mejorado al menos un porcentaje previamente fijado tras un cierto número de iteraciones; y parar si el número de transiciones aceptadas es menor que un determinado porcentaje previamente fijado tras un cierto número de iteraciones.

La importante aceptación que ha tenido la metaheurística de recocido simulado ha llevado al desarrollo de nuevas variantes, entre las que podríamos destacar la denominada de *recocido comprimido*, Ohlman y Bean (2000), que incorpora a la temperatura los conceptos de presión y volumen, para el tratamiento de problemas de optimización discretos con restricciones relajadas. También, Jiménez *et al.* (2002) consideran la aplicación del recocido simulado al caso de problemas de decisión bajo riesgo con imprecisión sobre las preferencias y consecuencias.

En todo caso, un aspecto práctico importante que se apoya en el valor principal de la utilización del recocido simulado, es que su ejecución sea en un tiempo razonable para la obtención de una solución próxima a la óptima o satisfactoria. Éste será un punto muy importante de investigación futura, ya que centrarse en el comportamiento en tiempo finito del recocido simulado más que en los resultados sobre convergencia asintótica de carácter mucho más teórico, que son los que dominan en las publicaciones con gran diferencia hasta el momento, debería proporcionar aún un mayor interés por su utilización.

BÚSQUEDA TABÚ

Otra metaheurística es la *búsqueda tabú*, propuesta por Glover en 1986, basándose en anteriores trabajos suyos publicados en 1977, Glover (1977), en los que ya introdujo algunos de los conceptos e ideas posteriormente utilizados. Su objetivo básico, al igual que el recocido simulado, es intentar solventar el problema de quedar atrapado en un óptimo local. El procedimiento de búsqueda tabú se comporta como uno de búsqueda local, sin embargo, a diferencia de los esquemas convencionales de máximo descenso, la búsqueda tabú permite movimientos a soluciones que pudieran ser no favorables desde el punto de vista de la solución actual. Además, para evitar el posible ciclado se considera la denominada *lista tabú*, en la que se guardan durante cierto tiempo atributos que permiten identificar la solución o el movimiento realizado. De este modo, todo movimiento que tenga un atributo en la lista tabú se considera prohibido no permitiéndose llevarlo a cabo, de manera que las restricciones se basarán en el mantenimiento de una función de memoria que determine durante cuánto tiempo una restricción tabú es obligada o, alternativamente, que movimientos son admisibles en cada iteración.

Ya que la lista tabú está formada por atributos y no por movimientos o soluciones, se podría prohibir pasar a soluciones óptimas y eficientes. Para evitar tal inconveniente, se *utilizan niveles de aspiración*. Así, si una solución tabú, y por tanto prohibida, supera los niveles de aspiración, entonces se permite el movimiento a ella.

En términos generales, la búsqueda tabú tiene los siguientes tres componentes, Glover y Laguna (1997): 1) una memoria a corto plazo para evitar el ciclado; 2) una memoria a medio plazo para intensificar la búsqueda; y 3) una memoria a largo plazo para diversificar la búsqueda.

La idea básica de la búsqueda tabú es crear un subconjunto LT (lista tabú) de N (función entorno), cuyos elementos o atributos se denominan «movimientos tabú» y estarán formados por una lista histórica de movimientos previamente detectados como no apropiados o por un conjunto de condiciones tabú, que típicamente serán restricciones que deben satisfacerse. Por tanto, el subconjunto LT restringirá la búsqueda y mantendrá la búsqueda tabú como si fuera simplemente un esquema de máximo descenso. En cada etapa del algoritmo, se elegirá un «mejor» movimiento dado por la función de evaluación \bar{f} .

Destaquemos también que, además de la elección de los atributos para la lista tabú y los niveles de aspiración, hay otras decisiones que tomar para poder aplicar el método:

- *Estructura de entornos.* La estructura de entorno estará claramente vinculada a la definición y características de la región factible X . En cada iteración del algoritmo, la transformación local que se puede aplicar a la actual solución \bar{x} definirá un entorno de soluciones $E(\bar{x})$ en X . En general, para cualquier problema específico, habrá muchas posibles definiciones de estructuras de entorno, lo que obliga a precisar el hecho de que su elección es importante, ya que es un aspecto crítico en la eficiencia del algoritmo. No existen reglas para tal elección y, en este momento, debería basarse en el conocimiento del problema en cuestión.
- *Longitud de la lista tabú.* El tamaño que suele recomendarse es 7, siendo el rango de valores para los que puede considerarse el método efectivo de 5 a 12.
- *Regla de parada.* Las reglas de parada más utilizadas son: 1) fijar un número de iteraciones (o un tiempo de CPU); 2) cuando se hubieran dado un cierto número de iteraciones sin mejora del valor (a precisar) de \bar{f} ; y 3) cuando \bar{f} alcance un nivel umbral preespecificado.

Para hacer más eficiente la estrategia de búsqueda en problemas complejos se suelen considerar algunos elementos adicionales a los anteriores que brevemente comentaremos:

- *Intensificación.* La idea que subyace al concepto de intensificación de búsqueda es que, como probablemente haría un ser humano, se debería explorar más concienzudamente zonas de la región factible que fueran más prometedoras. Así, de vez en cuando, debería pararse el proceso de búsqueda normal y ejecutar una búsqueda intensificada.

Hay diferentes enfoques de intensificación y, entre ellos, podríamos citar un cambio en la estructura de entorno que permita unos movimientos más potentes y variados o recomenzar la búsqueda desde la mejor solución actualmente conocida fijando las componentes que resulten más atractivas. Observemos que

aunque la intensificación se ha utilizado en muchas implementaciones, no siempre ha sido necesaria, ya que se ha probado que la búsqueda basada en el proceso normal era suficiente para alcanzar una solución aceptable.

- *Diversificación*. Una de las objeciones a todos los métodos de búsqueda local, incluyendo la búsqueda tabú, es el hecho de que tienden a ser demasiado «locales», es decir, que tienden a gastar la mayor parte de su tiempo, si no todo, en una porción limitada de la región factible. Para superar este inconveniente, se ha considerado la diversificación, que es un mecanismo algorítmico que pretende aliviar este problema forzando la búsqueda en áreas de la región factible previamente no exploradas, Soriano y Gendreu (1996). Las dos técnicas de diversificación más utilizadas son la *diversificación con nuevo comienzo*, en que se trata de forzar la utilización de unas pocas componentes raramente utilizadas en la actual solución y recomenzar la búsqueda desde ese punto; y la *diversificación continua*, que se alcanza sesgando la evaluación de posibles movimientos mediante la adición a los objetivos f_i de pequeños términos relacionados con componentes de frecuencias. Hagamos hincapié en que éste es posiblemente el aspecto crítico más importante en el diseño de esta clase de metaheurísticas.
- *Admisión de soluciones infactibles*. El conjunto de restricciones de un problema, que definen su región factible, con frecuencia restringen demasiado el proceso de búsqueda, siendo ello un factor que conlleva una solución final mediocre, lo que ha conducido a la consideración de *relajación de restricciones* como una estrategia que permite crear de manera circunstancial una región de búsqueda que permite una exploración con estructuras de entorno más simples y con mayor garantía de alcanzar una solución mejor. Esta estrategia y otras han supuesto una ayuda al proporcionar implemetaciones más eficientes en la búsqueda tabú.

Se ha conseguido una extensión de la búsqueda tabú mediante la consideración de probabilidades para varios de los principios de búsqueda del algoritmo. Esto ha conducido a la denominada *búsqueda tabú probabilística*, Glover (1989) y Glover y Laguna (1997), aún no estudiada y explorada suficientemente.

Con respecto al contexto multiobjetivo, existen varias propuestas de extensión de esta metaheurística. Entre ellas podríamos citar a MOTS (Multi-Objective Tabu Search), Hansen (1997), que comienza generando aleatoriamente soluciones como punto de partida del algoritmo, para pasar a determinar un vector de pesos para cada una de tales soluciones, basándose en la métrica ponderada de Tchebycheff. La idea es proponer pesos de manera que los puntos se distribuyan uniformemente sobre la frontera de Pareto. Variando los pesos se generarán soluciones alternativas y se elegirá el mejor entorno que no incumpla la lista tabú, debiendo conducir a soluciones no dominadas. Este método tiene diversas variantes y, entre ellas, podríamos destacar la de Hansen (1997), que propone diferentes formas de incorporar las preferencias del posible usuario en forma interactiva.

También Gandibleux *et al.* (1997) han propuesto una técnica multiobjetivo basada en la utilización del punto utopía como referencia. Hertz *et al.* (1994), proponen tres enfoques para tratar problemas con múltiples objetivos. El primero se basa en la suma ponderada de los objetivos, resultando demasiado simple y poco útil. El segundo

consiste en la construcción de una jerarquía de las funciones objetivo, de manera que se considera una función objetivo en cada iteración, utilizando objetivos adicionales en caso de empate. La crítica más fuerte a este procedimiento está en que la ordenación que se considere en los objetivos puede tener un efecto importante en la búsqueda. Finalmente, el tercer enfoque, se basa en el método de las ϵ -restricciones, que consiste en el procesamiento secuencial de los objetivos, considerando sólo uno cada vez y tratando al resto como restricciones.

Otras referencias al tema donde se consideran, entre otros, enfoques híbridos o la comparación de metaheurísticas, se pueden ver en el texto de Coello *et al.* (2002).

OTROS ENFOQUES

Los tres enfoques metaheurísticos que hemos descrito han sido los más desarrollados y utilizados en la última década. Su éxito en la aplicación a problemas reales complejos ha motivado el desarrollo de otros planteamientos metaheurísticos prometedores y a continuación describiremos brevemente algunos de ellos.

En primer lugar consideramos la *colonia* o *sistema de hormigas*, que está inspirada en el comportamiento real de las colonias de hormigas. Éstas, cuando se desplazan, depositan en el suelo una sustancia química llamada *pheromene*, Dorigo y Caro (1999), que influye en su comportamiento, ya que tienden a elegir aquellos caminos donde haya mayor cantidad de *pheromene*. Las estelas de esta sustancia actúan como un mecanismo de comunicación indirecto entre las hormigas. Desde la perspectiva de la Informática, puede verse el sistema de hormigas como un sistema multiagente con interacciones de bajo nivel entre los agentes.

Las tres ideas más importantes que se han adoptado en esta metaheurística son: 1) la comunicación indirecta a través de estelas de *pheromene*; 2) los caminos más cortos tienden a tener una tasa de crecimiento de *pheromene* mayor; y 3) las hormigas tienen una mayor preferencia (con una cierta probabilidad) de seguir aquellos caminos que contienen una mayor cantidad de *pheromene*. Adicionalmente, también se han incorporado ciertas capacidades no existentes en las colonias de hormigas reales. Por ejemplo: 1) cada hormiga es capaz de estimar cuán lejos se encuentra de un cierto estado; 2) las hormigas tienen información sobre el medio ambiente y lo utilizan para tomar decisiones (comportamiento no sólo adaptativo, sino también exhaustivo); y 3) las hormigas tienen memoria, ya que es necesario asegurar que sólo se generen soluciones factibles en cada etapa del algoritmo.

La aplicación original de este algoritmo se llevó a cabo con el problema del viajante, pero posteriormente ha habido otras aplicaciones y su extensión al caso multiobjetivo, Mariano y Morales (1999).

Otra metaheurística es el llamado *algoritmo mimético*, introducida por Moscato (1993) y que tiene sus raíces en la palabra «mime», introducida por el biólogo Richard Dawkins, que define un mime como una «unidad de imitación» en la transmisión cultural. Así, un algoritmo mimético podría verse como un enfoque de solución que pretende imitar la evolución cultural más que la biológica. La principal diferencia está en cómo se transmite tal información, pues mientras los genes pasan de una

generación a otra intactos, los mimes típicamente se adaptarán de acuerdo con las características del individuo que los transmita. Esta clase de algoritmos se ha mostrado útil en problemas de optimización combinatoria uniojetivo y su utilidad en el caso multiobjetivo parece prometedora, aunque todavía no se ha llevado a cabo su extensión.

Indiquemos finalmente, que existen otras metaheurísticas con un menor desarrollo, pero en las que actualmente se está trabajando en un intento de conseguir buenos resultados futuros. Citemos, entre otras: la *optimización de un enjambre*, Shi y Eberhart (1998), que se basa en la idea de simular los movimientos de un grupo o población de pájaros que buscan alimento; el *aprendizaje de refuerzo distribuido*, Mariano (2001), que permite la interacción entre agentes en un ambiente común, cooperando para el establecimiento de una política óptima sobre estados y acciones que permitan el logro de una meta común; los *algoritmos culturales*, Reynolds (1994), que se apoyan en la observación hecha por investigadores sociales que sugieren que la cultura podría encontrarse simbólicamente codificada y transmitida dentro y entre poblaciones, como otro mecanismo de transmisión; y el *sistema inmune*, Smith *et al.* (1993), que se basa en la observación de que nuestro sistema inmune protege el organismo de bacterias, virus y otros patógenos extraños, y trasladado a un sistema computacional se ha desarrollado un sistema inteligente paralelo que es capaz de aprender y recuperar el conocimiento previo para resolver tareas de clasificación y reconocimiento.

ALGUNAS VENTAJAS E INCONVENIENTES

Observemos que para poder determinar si una metaheurística puede tener éxito en su aplicación al paradigma multiobjetivo es fundamental, en primer lugar, comprender sus ventajas y debilidades naturales y, además, como se trasladarán éstas a un contexto de optimización con objetivos múltiples. El primer aspecto a tener en cuenta es que la mayoría de las metaheurísticas son de manera natural discretas en comparación con la modelización convencional, que es continua en su mayoría. Esto implica que hay que discretizar las variables continuas previamente a la aplicación de la metaheurística y resulta obvio que cuanto mayor se pretenda que sea el grado de precisión, se requerirá mayor esfuerzo computacional.

Una posible ventaja de las metaheurísticas es su flexibilidad, ya que el rango de modelos capaz de resolverse mediante estos métodos es mucho mayor que con los métodos convencionales. Así, los modelos con los factores de complicación antes citados pueden ser tratados más fácilmente y el conocimiento de problemas específicos puede ser integrado en un proceso de solución de manera más sencilla. Esta flexibilidad ha ampliado el conjunto y tipo de problemas a los que los métodos multiobjetivo se pueden aplicar, en particular en muchos de los campos de la Medicina e Ingeniería.

También hay algunas desventajas en la utilización de metaheurísticas con respecto a los métodos de solución convencionales. En primer lugar, observemos que las metaheurísticas no son funciones optimizadoras ya que, como apuntamos, su propósito es buscar y encontrar buenas soluciones para el problema más que garantizar una solución óptima. Así, si el modelo construido es suficientemente simple como para permitir que las técnicas convencionales sean capaces de proporcionar un óptimo,

entonces las metaheurísticas se deben desechar. Sin embargo, si no fuera ese el caso, como se ha mostrado ya en múltiples aplicaciones, es claro que debe considerarse su utilización.

Otra posible desventaja, se refiere al hecho de que hay un número bastante mayor de parámetros en las metaheurísticas que tienen que ser propuestos por el modelizador que en los métodos convencionales. En general, la solución será sensible a tales parámetros y de aquí que puedan resultar necesarias ejecuciones de la metaheurística con diferentes valores para los parámetros como un tanteo previo a alcanzar una buena solución. Esto conlleva el asumir que una metaheurística sea en cierto sentido una caja negra y de ahí la conveniencia de no conformarse con una única ejecución.

CONCLUSIONES

Es claro el creciente interés por estas técnicas de resolución, como lo prueba el importante número de aplicaciones que se han desarrollado, ya sea a través de libros, artículos y conferencias, especialmente desde principios de la década de los años noventa. Son varios los factores que han impulsado este crecimiento y, entre ellos, destacaríamos el anteriormente aludido incremento en la potencia de los ordenadores. También ha habido un efecto de transferencia de los avances en los métodos metaheurísticos y su aplicación a problemas uniobjetivo a los problemas con varios objetivos y, finalmente, la modelización de problemas multiobjetivo reales importantes, por sí misma, ha demandado procedimientos de solución que han producido novedosos avances en los métodos metaheurísticos. Esto está avalado por el creciente número de aplicaciones habidas en distintas áreas, tales como las Ingenierías Industrial, Mecánica, Medioambiental, Planificación, Medicina, Investigación Operativa...

La metaheurística más utilizada y desarrollada han sido los algoritmos evolutivos y dentro de ellos, los genéticos. La razón subyacente del éxito de tales enfoques está en el hecho de que los algoritmos genéticos pueden de manera natural proporcionar múltiples soluciones, es decir, zonas potencialmente óptimas, siendo así una buena herramienta para representar muchas soluciones que estén incluidas en el conjunto eficiente. En segundo lugar y a cierta distancia en cuanto a su utilización, se encuentra el recocido simulado y ya, en un nivel más bajo, la búsqueda tabú que, en muchas ocasiones se ha utilizado conjuntamente con alguna de las dos anteriores en un intento de refinar el correspondiente método de solución para evitar con mayor fuerza el camino hacia un óptimo local.

También, algunas de las metaheurísticas más recientemente desarrolladas, como el sistema de hormigas, algoritmos culturales... están aún pendientes de su extensión y aplicación a problemas de programación multiobjetivo. En todo caso, las metaheurísticas han demostrado ser herramientas útiles con sus propias ventajas e inconvenientes y es de esperar que en los próximos años surja un crecimiento en la potencia del proceso de solución y en su precisión, para permitir la generación de mejores soluciones para los decisores.

Agradecimientos: El desarrollo de este trabajo se ha llevado a cabo con la financiación de los proyectos del Ministerio de Ciencia y Tecnología DPI 2001-3731 y BFM 2002-11282-E.

BIBLIOGRAFÍA

- Aarts, E.H.L. y Korst, J. (1989), *Simulated Annealing and Boltzmann Machines: A Stochastic Approach to Combinatorial Optimization and Neural Computing*, Wiley, Chichester, England.
- Aarts, E.H.L. y Lenstra, J.K. (1997), *Local Search in Combinatorial Optimization*, Wiley, Chichester, England.
- Anily, S. y Federgruen, A. (1987), «Simulated Annealing Methods with General Acceptance Probability», *Journal of Applied Probability* 24, pp.657-667.
- Bäck, T. (1996), *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice*, Oxford University Press, New York.
- Cerny, V. (1985), «Thermodinamical Approach to the Travelling Salesman Problem: An Efficient Simulation Algorithm», *JOTA* 45, pp.41-51.
- Charnes, A. y Cooper, W.W. (1961), *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, Wiley, New York.
- Coello, C.A., Van Veldhuizen, D.A. y Lamont G.B. (2002), *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*, Kluwer, New York.
- Cohn, H. y Fielding, M. (1999), «Simulated Annealing: Searching for an Optimal Temperature Schedule», *SIAM Journal on Optimization* 9, pp.779-802.
- Dorigo, M. y Caro, G.D. (1999), «The Ant Colony Optimization Metaheuristic», en *New Ideas in Optimization*, Corne et al. (eds.), McGraw-Hill, New York.
- Fielding, M. (2000), «Simulated Annealing with Optimal Fixed Temperature», *SIAM Journal on Optimization* 11, pp.289-307
- Fogel, D.B. (ed) (1998), *Evolutionary Computation. Toward a New Philosophy of Machine Intelligence*. The Institute of Electrical and Electronic Engineers, New York.
- Fleisher, M.A. (1995), «Simulated Annealing: Past, Present and Future», en *Proceedings of the 1995 Winter Simulation Conference*, IEEE Press, pp.155-161.
- Gandibleux, X., Mezdaoui, N. y Fréville, A. (1997), «A Tabu Search Procedure to Solve Combinatorial Optimization Problems», en *Advances in Multiple Objective and Goal Programming*, R. Caballero et al. (eds.), Vol. 455 LNEMS, Springer, pp.291-300.
- Glover, F. (1977), «Heuristics for Integer Programming using Surrogate Constraints», *Decision Sciences* 8, pp.156-166.
- Glover, F. (1986), «Future Paths for Integer Programming and Links to Artificial Intelligence», *Computers and OR* 5, pp.533-549.
- Glover, F. (1989), «Tabu Search, part I», *ORSA Journal on Computing* 1,3, pp.190-206.
- Glover, F. y Laguna, M. (1997), *Tabu Search*, Kluwer, Boston, Mass.
- Goldberg, D.E. (1989), *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison-Wesley, Reading, Mass.
- Hansen, M.P. (1997), «Tabu Search in Multiobjective Optimization», en *MCDM97*, Cape Town.
- Henderson, D., Jacobson, S.H. y Johnson, A.W. (2003), «The Theory and Practice of Simulated Annealing», en *Handbook of Metaheuristics*, F. Glover y G.A. Kochenberger (eds.), Kluwer, Boston.
- Hertz, A., Jaumard, B., Ribeiro, C. y Filho, W.F. (1994), «A Multicriteria Tabu Search Approach to Cell Formation Problems in Group Technology with Multiple Objectives», *RAIRO/Operations Research* 28, 3, pp.303-328.
- Holland, J.H. (1975), *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press, Ann Arbor.

- Ignizio, J.P. y Cavalier, T.M. (1994), *Linear Programming*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Jiménez, A., Ríos-Insua, S. y Mateos, A. (2002), «Interactive Simulated Annealing for Solving Imprecise Discrete Multiattribute Problems under Risk», *Pesquisa Operacional, Special Issue on Data Envelopment Analysis and Multicriteria Decision Aid* 22, 2, pp.265-280.
- Johnson, A.W. y Jacobson, S.H. (2002), «A Class of Convergent Generalized Hill Climbing Algorithms», *Applied Mathematics and Computation* 125, pp.359-373.
- Kirkpatrick, S., Gellatt, C. y Vecchi, M. (1983), «Optimization by Simulated Annealing», *Science* 220, pp.671-680.
- Koulamas, C., Antony, S.R. y Jaen, R. (1994), «A Survey of Simulated Annealing Applications to Operations Research Problems», *OMEGA* 22, pp.41-56.
- Mariano, C.E. (2001), *Aprendizaje por Refuerzo en Optimización Multiobjetivo*, PhD Tesis, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, México.
- Mariano, C.E. y Morales, E. (1999), «A Multiple Objective Ant-Q Algorithm for the Design of Water Distribution Irrigation Networks», T.R. HC-9904, Inst. Mexicano de Tecnología del Agua.
- Mitra, D., Romeo, F. y Sangiovanni-Vicentelli, A.L. (1986), «Convergence and Finite Time Behavior of Simulated Annealing», *Advances in Applied Probability* 18, pp.747-771.
- Moscato, P. (1993), «An Introduction to Population Approaches for Optimization and Hierarchical Objective Functions», *Annals of Operations Research* 41, pp.85-121.
- Nourani, Y. y Andresen, B. (1998), «A Comparison of Simulated Annealing Cooling Strategies», *Journal of Physics A-Mathematical and General* 31, pp.8373-8385.
- Ohlman, J.W. y Bean, J.C. (2000), «Compressed Annealing: Simulated Annealing under Pressure», Technical Report, Dept. of Industrial and Operation Engineering, U. of Michigan.
- Rechenberg, I. (1973), *Evolutionsstrategie: Optimierung Technischer Systeme nach Prinzipien der Biologischen Evolution*, Frommann-Holzboog Verlag, Stuttgart.
- Reynolds, R.G. (1994), «An Introduction to Cultural Algorithms», en *Proceedings of the 3rd Annual Conf. on Evolutionary Programming*, World Scientific, New Jersey, pp.131-139.
- Ríos, S., Ríos Insua, M.J. y Ríos-Insua, S. (1989), *Procesos de Decisión Multicriterio*, EUEDEMA, Madrid.
- Ríos Insua, D., Ríos Insua, S. y Martín, J. (1997), *Simulación. Métodos y Aplicaciones*, RA-MA, Madrid.
- Ríos Insua, S. (1993), *Investigación Operativa. Optimización*, Editorial CEURA, Madrid.
- Ríos Insua, S., Bielza, C. y Mateos, A. (2002), *Fundamentos de los Sistemas de Ayuda a la Decisión*, RA-MA, Madrid.
- Romeo, F. y Sangiovanni-Vicentelli, A. (1991), «A Theoretical Framework for Simulated Annealing», *Algorithmica* 6, pp.302-345.
- Schaffer, J.D. (1984), *Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms*, PhD Thesis, Vanderbilt University, Nashville.
- Schwefel, H.P. (1977), *Numerische Optimierung von Computer-modellen mittels der Evolutionsstrategie*, Birkhäuser Verlag, Basel (Edición Inglesa: *Numerical Optimization of Computer Models*, Wiley, Chichester, 1981).
- Serafini, P. (1992), «Simulated Annealing for Multiple Objective Optimization Problem», en *Proceedings of the 10th Int. Conf. on MCDM*, T. Tzeng et al. (eds), Springer, Berlin, V. 1, pp.87-96.

- Shi, Y. y Eberhart, R.C. (1998), «Parameter Selection in Particle Swarm Optimization», en *Proceedings of the 7th Annual Conf. on Evolutionary Programming*, V.W. Porto *et al.* (eds.), Springer, pp.591-600.
- Simon, H. (1957), *Models of Man*, Wiley, New York.
- Smith, R.E., Forrest, S. y Perelson, A.S. (1993), «Population Diversity in a Immune System Model: Implications for Genetic Research», en *Foundations of Genetic Algorithms 2*, L.D. Whitley (ed.), Morgan Kauffman, pp.153-165.
- Soriano, P. y Gendreau, M. (1996), «Fondements et Applications des Méthodes de Recherche avec Tabous», *RAIRO* 31, pp.133-159.
- Steuer, R. (1986), *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Applications*, Wiley, New York.
- Yu, P.L. (1973), A Class of Solutions for Group Decision Problems, *Management Science* 19, pp.936-946.
- Zeleny, M. (1982), *Multi-Criteria Decision Making*, McGraw-Hill, New York.